○軌道要素

③と⑤より.

r成分 $\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-\frac{\mu}{r^2}$ ⑧

θ成分 $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})=0$ (動はr成分のみより) ⇔ $r^2\dot{\theta}=$ 一定

⑧を変数変換する.

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu}{h^2} \quad (\because u\equiv\frac{1}{r},\ h\equiv r^2\dot{\theta}) \quad ⑨$$

⑨を解くと,

$$u=\frac{\mu}{h^2}[1+e\cos(\theta-\varpi)] \quad ⑩$$

$u\equiv 1/r$ より.

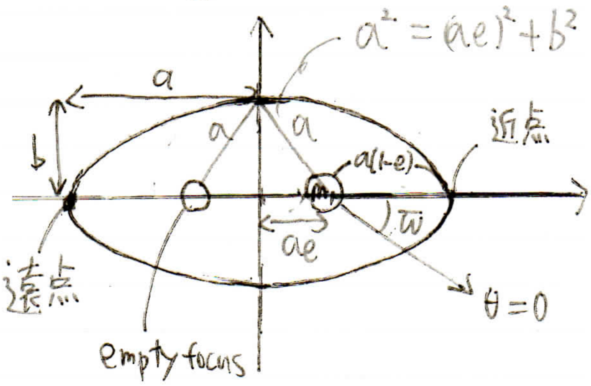
$$\boxed{r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\varpi)} \quad ⑪ \quad \text{ケプラーの第一法則}}$$

(∵ $p\equiv\frac{h^2}{\mu}$: 半直弦, e: 離心率, ϖ: 近日点引数)

特に楕円($e<1$)の場合,

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\varpi)} \quad (a: \text{半長軸}) \quad ⑫$$

と書ける.



いま,楕円の面積について考える.

$$\pi ab=\frac{hT}{2} \quad (\because ⑦式)$$

ここで, $p=h^2/\mu$, $b^2=a^2(1+e^2)$ より.

$$\boxed{T^2=\frac{4\pi^2}{\mu}a^3 \quad ⑬}$$

となる. これはケプラーの第3法則である.