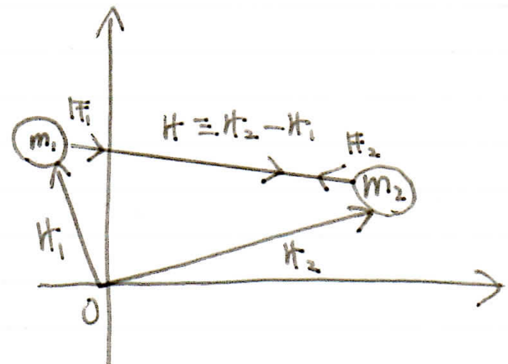
天体力学の世界

- 天体の運動を知るためには、天体力学が必要。

- 2体問題

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = G\dfrac{m_1 m_2}{r^3}\boldsymbol{r} & ① \\ m_2 \dfrac{d^2 \boldsymbol{r}_2}{dt^2} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^3}\boldsymbol{r} & ② \end{cases}$$



天体m_1とm_2が重力相互作用する系

②−①より

$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} + \mu \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0 \quad ③$$

$$\left(\because \mu \equiv G(m_1+m_2) \right)$$

③×$\boldsymbol{r}$より

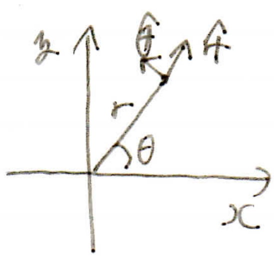
$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} \times \boldsymbol{r} = 0 \ \overset{\text{時間積分}}{\Rightarrow} \ \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{r} - \underbrace{\int \dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}}\, dt}_{=0} = \boldsymbol{h} \quad ④$$

↑軌道面に垂直な定ベクトル

極座標表示

$$\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}, \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{r}} + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad ⑤$$

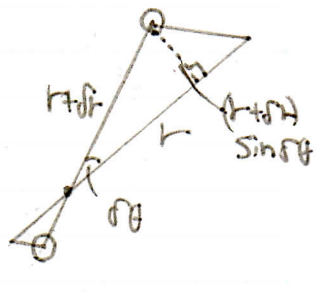
$$\left(\because \dot{\boldsymbol{r}} \equiv \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \ \ddot{\boldsymbol{r}} \equiv \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \right)$$



④に⑤を代入すると、

$$(\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) \times r\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{h}$$

$$r^2\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{h} \quad (\because \hat{\boldsymbol{z}} \equiv \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{r}}) \quad ⑥$$



時間δtに天体が掃く面積を考える。

$$\delta A \simeq \frac{1}{2} r(r+\delta r)\sin\delta\theta \simeq \frac{1}{2}r^2\delta\theta$$

$\delta t \to 0$とすると、⑥より面積速度は

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}h \ (\text{定ベクトル}) \ ⑦ \ (\therefore \text{ケプラーの第2法則})}$$

となる。